

Travaux de Simulation SD1.1

Analyse de Fourier

L'objectif est d'évaluer le nombre d'harmoniques significatifs contenu dans un signal périodique donné.

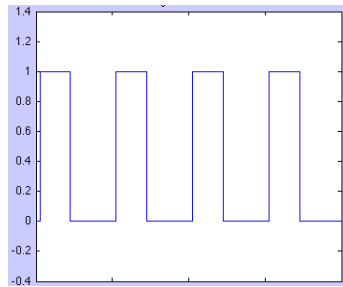
Travail de préparation : Donner les développements en série de Fourier complexes et réelles des signaux $s(t)$ périodiques, de période T ci-dessous. La durée où le signal sur une période est non nul est notée θ .

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT)$$

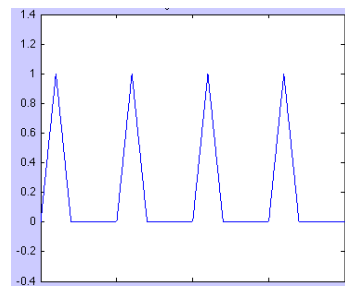
avec

$$g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\theta}\right)$$

$$\text{ou } g(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{\theta}\right) = \left(1 - \frac{|t|}{\theta}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{2\theta}\right)$$



Créneaux périodiques



Triangles périodiques

Manip SIDEAL

Après avoir convenablement choisi les unités (temps et fréquence) dans le menu *PREFERENCES*, utiliser le menu *SERIES DE FOURIER* pour :

- Visualiser une reconstruction progressive de ces signaux, harmonique par harmonique, en choisissant $T = 1$ ms et $\theta = 0.4$ ms. Commenter les résultats et les coefficients de Fourier en module. La superposition des sinusoïdes prend peu à peu la forme du signal $s(t)$. La somme converge très rapidement pour le signal périodique triangulaire, beaucoup plus lentement et avec toujours une différence aux points de discontinuité pour le signal périodique rectangulaire.

- En utilisant les boutons *Reculer/Avancer* (modifiez au besoin le pas de visualisation) et en vérifiant que les contributions harmoniques restent sinusoïdales, déterminer le nombre d'harmoniques nécessaire pour obtenir un écart final inférieur à 10 %, 1 % puis 0,1 %. Consigner les résultats dans un tableau. Notez également les valeurs de la puissance harmonique cumulée relative (en %).

Note: l'erreur quadratique relative moyenne ε entre un signal $s(t)$ et son développement en série de Fourier $s_M(t)$ arrêté à l'ordre M est donnée par

$$\varepsilon = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} (s(t) - s_M(t))^2 dt}{\int_{-T/2}^{T/2} s(t)^2 dt}$$

Soit N_x le nombre d'harmoniques conduisant à un écart de x % et P_x la puissance cumulée de ces composantes harmoniques exprimées en pourcentage relativement à la puissance totale du signal.

Signal	N_{10}	P_{10}	N_1	P_1	$N_{0,1}$	$P_{0,1}$
rectangulaire	2	90 %	24	95 %	221	99,9 %
triangulaire	2	95,6 %	3	99,5 %	7	99,9 %

- A partir de quelle harmonique pourriez-vous considérer que les signaux sont totalement constitués ?
 - Une trentaine d'harmoniques pour le signal périodique rectangulaire si on fait abstraction du phénomène de Gibbs aux point de discontinuité.
 - Seulement 4 harmoniques pour le signal périodique triangulaire
- Conclure sur la richesse harmonique de ces signaux.

Le signal rectangulaire est beaucoup plus riche en harmonique que le signal triangulaire. En plus des valeurs de la question 2, on peut le justifier de 2 autres manières : d'une part le signal triangulaire est plus proche de la sinusoïde que le signal rectangulaire, d'autre part la décroissance de l'amplitude de ses coefficients de Fourier décroît en $1/n^2$, soit bien plus rapidement que celle des coefficients de Fourier du signal rectangulaire qui décroît en $1/n$.
- Lancer la reconstruction progressive sur 20 harmoniques d'un signal rectangulaire périodique ($T = 1$ ms, $\theta = 0.4$ ms). Avancer jusqu'à la 100e harmonique.
 - Commentez et justifiez le graphique présentant la *DERNIERE HARMONIQUE normalisée*.

L'harmonique d'ordre 100 est nul. En effet, le coefficient de Fourier est donné par :

$$c_n = \frac{\theta}{T} \text{sinc}\left(\pi \theta \frac{n}{T}\right)$$

Compte tenu des valeurs $T = 1 \text{ ms}$, $\theta = 0,4 \text{ ms}$, l'expression devient $c_n = 0,4 \text{ sinc}(\pi 0,4n)$

En faisant $n = 100$, on obtient $c_{100} = 0,4 \text{ sinc}(40\pi) = 0$

- Augmenter la période du signal, par exemple en la multipliant par 2 plusieurs fois de suite et observer les coefficients de Fourier. Justifier.

Augmenter la période du signal, c'est diminuer l'écart fréquentiel entre chaque composante harmonique qui vaut $1/T$. Le nombre d'harmoniques affiché étant constant égal à 100, l'étendue fréquentielle diminue et l'enveloppe en sinus cardinal apparaît plus nettement.

- Avancer ensuite jusqu'à la 150e harmonique avec un pas de 10. Comment évoluent les coefficients de Fourier ? Effectuer un zoom sur la dernière harmonique. Que constatez-vous ? Expliquez.

Avec 150 harmoniques, il devient difficile de distinguer chaque raie et seule l'enveloppe en sinus cardinal reste distinctement reconnaissable. Le zoom sur la dernière harmonique fait apparaître que celle-ci commence à perdre sa forme sinusoïdale et donc que l'échantillonnage numérique devient insuffisant.