Travaux de Simulation C2.1

Codage de Hamming

Rappel : *Le code de Hamming, de son concepteur le mathématicien Richard Hamming (1915-1998), est un code linéaire détecteur et correcteur d'erreur. Il permet la détection et la correction automatique d'une seule erreur.*

Principe du codage : le message de m bits, noté matriciellement $M_{1,m}$, est codé sur n bits pour former le mot-code $C_{1,n}$, avec $n = m + k$, k étant le nombre de bits de redondance correspondant à la séquence de contrôle adjointe au message.

Message en clair (m bits) + séquence de contrôle (k bits) = mot-code (n bits)

Le code est dit code de Hamming si $n = 2^k - 1$. On le note CH(n,m) n étant le nombre de bits permettant le codage d'un message de m bits. Il est entièrement défini par sa matrice génératrice $G_{n,m}$, elle-même est définie à partir de sa matrice contrôle $H_{k,n}$ (cf. cours). On a

$$G_{n,m} = \begin{pmatrix} I_m \\ A_{k,m} \end{pmatrix} \; et \; H_{k,n} = \begin{pmatrix} A_{k,m} \; I_k \end{pmatrix}$$

avec I_m matrice carrée identité de rang n, $A_{k,m}$ matrice des m séquences à k bits de contrôle. Chaque mot-code $C_{1,n}$ résulte de l'action de la matrice génératrice $G_{n,m}$ sur le message $M_{1,m}$ suivant le produit matriciel suivant (l'exposant t indique la transposition)

$$C_{1,n}^t = G_{n,m} \; M_{1,m}^t$$

L'action de la matrice de contrôle $H_{k,n}$ sur le mot-code $C_{1,n}$ fournit le syndrome $S_{1,k}$

$$S_{1,k}^t = H_{k,n} \; C_{1,n}^t$$

On démontre facilement que le syndrome est nul s'il n'y a pas d'erreur (il suffit de ne pas oublier que les additions se font modulo 2). Autrement dit que

$$H_{k,n} \; G_{n,m} \; M_{1,m}^t = 0$$

On démontre tout aussi facilement que le syndrôme est non nul en présence d'erreur et que sa valeur permet de localiser une erreur simple dans la matrice de contrôle. L'objectif du TP est d'étudier ce code, de comprendre en quoi il est détecteur et correcteur d'une erreur (et pas plus)..

Travail de préparation :

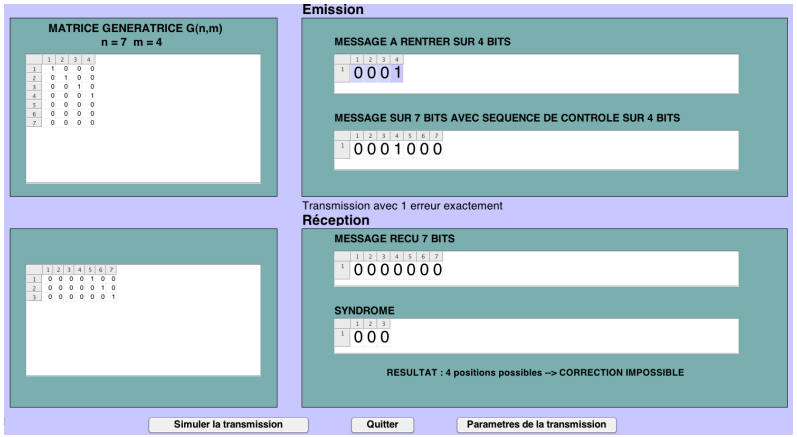
- On veut transmettre des mots-code de 7 bits ($n = 7$). Déterminer la taille k de la séquence de controle et en déduire la taille m des messages d'information que l'on peut coder. Déterminer une matrice de contrôle $H(k,n)$. Combien y en a t'il ? En déduire la matrice génératrice $G(n,m)$. Combien y en a t'il ?
- Enumérer et déterminer tous les mots-code possibles. En déduire la distance de Hamming minimale et le pouvoir correcteur de ce code.

Manip SIDEAL

Lancer le logiciel *SIDEAL* puis cliquez sur le bouton *Codage*. Sélectionner ensuite le menu *CODAGE DE CANAL* puis *Codage de Hamming*.

1) Paramétrer un codage de Hamming CH(7, 4) avec une matrice de contrôle *H(3,7)* constituée des colonnes rangées dans l'ordre décimal décroissant, c'est à dire, 7,6,5,3. Afficher la matrice génératrice *G(7,4)*.

2) Lancer le codage du message 0001. Attention de bien valider chaque saisie de bits. Cliquer sur *"Simuler la transmission"* aura pour effet de générer le mot-code émis et le mot-code reçu avec son syndrome. La fenêtre de travail ressemblera à celle ci-dessous.



3) Justifiez le mot-code crée.

4) Simuler une transmission sans erreur. Justifiez le syndrome du mot-code reçu.

5) Paramétrer une transmission avec 1 erreur exactement à l'aide du bouton *"Paramètres de transmission"*. Justifier le syndrôme et le diagnostic qui s'affiche. *(L'erreur de transmission est simulée en remplaçant aléatoirement un bit du mot-code par son complémentaire)*.

6) Idem avec 2 erreurs. Justifier le diagnostic et la valeur du syndrôme affiché.

7) Paramétrer un codage de Hamming CH(7, 4) avec une matrice de contrôle *H(3,7)* constituée des colonnes rangées dans l'ordre décimal décroissant, c'est à dire, 7,6,5,4. Mêmes questions. Pourquoi ce code est-il problématique ?